Фамилия Имя Отчество	Поздяева Полина Андреевна Плотникова Екатерина Алексеевна
Город	Пенза
Место учебы, класс	МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Секция	Математика
Название работы	Нетранзитивные кости и отношения
Научный руководитель работы Фамилия, Имя, Отчество	Жистина Лилия Фаритовна
E-mail научного руководителя (для получения программы секции и ссылки на свидетельства, дипломы и благодарственные письма)	Zamuvr53@gmail.com
Место работы, должность	МБОУ СОШ № 18 г. Пензы

Министерство просвещения РФ

Секция: Математика

Нетранзитивные кости и отношения

Автор работы:
ученицы 8 класса
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Поздяева Полина Андреевна
Плотникова Екатерина Алексеевна

Место выполнения работы:
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы

Научный руководитель:
Жистина Л.Ф.

г. Пенза, 2020

Оглавление

Введение

Важнейшей частью постановки и решения самых разных проблем является оценивание, сравнение конкурирующих альтернатив на предмет выбора одной или нескольких наилучших. Человек должен сравнивать возможные способы практических действий, чтобы выбрать один из них; сравнивать множество объектов или субъектов, соперничающих между собой; несколько конкурирующих теорий той или иной системы; пути дальнейшего развития этой системы и т. д. В ситуациях конфликта и борьбы часто жизненно важны умозаключения и прогнозы о превосходстве одних участников над другими, об отношениях доминирования и подчиненности, о предпочтительности одних средств борьбы по сравнению с другими.

В классической логике сравнения и в традиционной теории принятия решений транзитивность отношений превосходства вводится как аксиома, которая состоит в следующем: если первое превосходит второе в определенном отношении (по определенному признаку), а второе превосходит третье, то первое превосходит третье в указанном отношении.

Овладение транзитивными рассуждениями считается одним из важнейших этапов умственного развития человека. Оно связано со способностью делать дедуктивные заключения, с пониманием сущности измерения, принципов сохранения и т. д. Аналогично, по мнению ряда исследователей, транзитивность должна соблюдаться и при принятии более важных и менее очевидных решений. Но обычно это не всегда происходит в жизни.

Поэтому тема исследования «Нетранзитивные кости и отношения» актуальна в современном неоднозначном мире.

Цель работы: исследовать, как выбор нетранзитивных костей влияет на результат игры

Задачи исследования:

1. Изучить понятия транзитивности и нетранзитивности

2. Проверить в случае использования набора нетранзитивных костей, получит ли преимущество второй игрок, который, независимо от выбора первого

игрока, может выбрать из оставшихся костей такую, бросание которой с вероятностью 5/9 превысит результат первого игрока?

Предполагаемый результат: расширение области знаний по теме «Нетранзитивность»; выработка стратегии в игре с нетранзитивными костями.

Глава 1. Нетранзитивные кости

1.1. Транзитивность, нетранзитивность, антитранзитивность: определение понятий

Термин «транзитивность» происходит от латинского transitus, что означает «переход». Применительно к логике речь идет о возможности вынесения верного суждения типа: «Если A>B и B>C, то A>C», или, в более общем виде, суждения об определенном отношении между двумя объектами на основе уже известных верных суждений о существовании указанного отношения между каждым из этих двух объектов и каким-либо общим третьим. Проще говоря, речь идет о том, распространяется ли, переходит ли на пару объектов A-C определенное отношение, существующее между парами объектами A-B и B-C. По основанию транзитивности все отношения могут быть подразделены на транзитивные, антитранзитивные и нетранзитивные.

Транзитивным называется такое отношение, из наличия которого между элементами (a, b) и элементами (b, c) следует наличие того же отношения между элементами (a, c), формально: $\forall a, b, c \ \in X, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Таковыми являются отношения эквивалентности, параллельности прямых, логического следования, делимости, включения подмножества и некоторые другие. Задачи на усвоение этого свойства отношений и овладение транзитивными умозаключениями даются уже на самых ранних этапах обучения. Типовой пример: «Миша выше Васи. Вася выше Бори. Кто из них самый высокий? Кто из мальчиков выше: Миша или Боря?». Логика правильных рассуждений очевидна для любого нормально развитого взрослого – Миша выше Васи, Вася выше Бори, значит, Миша выше Бори, и он самый высокий.

Антитранзитивным называется такое отношение, наличие которого между элементами (a, b) и элементами (b, c) исключает возможность наличия этого же отношения между элементами (a, c), формально: $\forall a, b, c \ \in X, aRb \wedge bRc \Rightarrow \overline{aRc}$

В качестве примеров, выраженных в понятиях естественного языка, можно назвать такие отношения, как «быть биологическим отцом», «быть старше на год», «быть вассалом» («вассал моего вассала – не мой вассал») и некоторые другие. Логика рассуждений в этих случаях очевидна: если А – биологический отец В, а В – биологический отец С, то А никак не может быть биологическим отцом С, поскольку А – дедушка С. Если А старше на год В, а В старше на год С, то А никак не может быть старше на год С, поскольку А старше С на 2 года.

Нетранзитивным называется такое отношение, наличие которого между элементами (a, b) и элементами (b, c) не позволяет определенно утверждать о наличии этого же отношения между элементами (a, c), формально:

$$\overline{\forall a, b, c} \in X, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

Таковым является отношение неравенства: если элемент a не равен элементу b и элемент b не равен элементу c, то элемент a может быть как равен, так и не равен элементу c. В качестве примеров, выраженных в понятиях естественного языка, можно назвать такие отношения, как «быть другом», «любить», «поедать» и некоторые другие.

1.2. Нетранзитивный набор костей

Набор игральных костей **нетранзитивен**, если он состоит из трёхигральных костей А, *B* и *C*, для которых результат бросания кости *A* с вероятностью свыше 50 % больше результата бросания кости В, результат бросания кости В с вероятностью свыше 50 % больше результата бросания кости *C*, однако утверждение о том, что результат бросания кости А с вероятностью свыше 50 % больше результата бросания кости *C*, является ошибочным. То есть набор игральных костей нетранзитивен, если для него бинарное отношение *«выпадения большего числа с вероятностью более 50 %»* не является транзитивным. Существуют наборы игральных костей с более выраженным свойством, в которых для каждой кости есть другая, при бросании которой с вероятностью более 50 % будет получено большее число.

Примером нетранзитивных костей является следующий набор:

КостьA с числами на гранях 2, 2, 4, 4, 9, 9.

КостьB с числами на гранях 1, 1, 6, 6, 8, 8.

КостьC с числами на гранях 3, 3, 5, 5, 7, 7.

Для этого набора вероятность того, что при бросании *A* будет получено число, большее чем при бросании *B*; вероятность того, что при бросании *B* будет получено число, большее чем при бросании *C*; а также вероятность того, что при бросании *C* будет получено число, большее чем при бросании *A*, одинаковы и составляют 5/9, то есть этот набор является нетранзитивным.

Кости Эфрона — набор из четырёх нетранзитивных костей, изобретенный Брэдли Эфроном.

Четыре кости A, B, C, D имеют на своих гранях следующие числа:

A: 4, 4, 4, 4, 0, 0

B: 3, 3, 3, 3, 3, 3

C: 6, 6, 2, 2, 2, 2

D: 5, 5, 5, 1, 1, 1

Результат броска каждой из кости из набора больше результата бросания следующей кости с вероятностью 2/3:

P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = P(D > A) = 2/3

Результат бросания кости B определен заранее; кость A превысит этот результат в 2/3 случаев, поскольку числа на четырёх из шести его граней больше.

Аналогично, кость B превысит результат C с вероятностью 2/3, поскольку у C только на двух гранях числа большие.

P(C>D) согласно результатам составления условных вероятностей двух событий:

- При бросании C выпадает 6 (вероятность 1/3); C дает больший результат, независимо от результата бросания D (вероятность 1)
- При бросании C выпадает 2 (вероятность 2/3); C дает больший результат, за исключением получения 5 при бросании D (вероятность 1/2)

Суммарная вероятность выигрыша C таким образом составляет: $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Аналогичным образом вероятность выигрыша при бросании D по сравнению с бросанием A составляет: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Четыре кости из набора Эфрона, впрочем, имеют разные вероятности выигрыша в игре против кости, выбранной случайным образом из оставшихся трех.

Согласно расчетам выше, бросание кости A дает больший результат бросания B в двух третях случаев, впрочем может победить D только в каждом третьем случае. Вероятность же лучшего результата при бросании A по сравнению с бросанием C составляет 4/9 (на A должно выпасть 4 *и* на C должно выпасть 2). Таким образом, общая вероятность получения при бросании A большего числа, чем при бросании другой кости, выбранной случайным образом: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\right) = \frac{13}{27}$

Аналогично, B побеждает C с вероятностью 2/3 и может победить A в 1/3 случаев. Вероятность кости B дать при бросании результат больший, чем кости D, составляет ½ (вероятность выпадения 1 на кубике D). Таким образом вероятность победы B над другой костью из набора: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Кость C побеждает D в двух третях случаев и имеет вероятность 1/3 выигрыша у кубика B. Вероятность её выигрыша у кубика A составляет 5/9. Совокупная вероятность победы C над выбранным случайным образом «соперником»: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9}\right) = \frac{14}{27}$

Наконец D в 2/3 случаев побеждает A и в 1/3 случаев побеждает C. Вероятность, что результат броска этой кости превысит результат бросания B составляет 1/2 (вероятность выпадения 5 на D). Поэтому D даст результат, больший, чем у выбранной случайным образом кости с вероятностью: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Таким образом, кость C является наилучшей из набора с точки зрения вероятности выпадения числа, большего чем результат бросания любой другой кости из набора. Для неё такая вероятность составляет 0,5185.

Варианты с одинаковыми суммами чисел

Кости Эфрона характеризуются различными математическими ожиданиями результатов бросания, то есть, по сути, разными суммами чисел, нанесенными на их грани. Для A такая сумма составляет 16, в то время как для B и D 18, а для C 20. Поскольку нетранзитивность набора костей зависит от относительной величины чисел на их гранях, а не от их абсолютной величины, можно подобрать такие варианты чисел, для которых при неизменных вероятностях победы при бросании суммы чисел на гранях костей (а так и математическое ожидание результатов их бросания) будут одинаковыми. Примерами таких вариантов являются:

A: 6, 6, 6, 6, 0, 0

B: 4, 4, 4, 4, 4, 4

C: 8, 8, 2, 2, 2, 2

D: 7, 7, 7, 1, 1, 1

или

A: 7, 7, 7, 7, 1, 1

B: 5, 5, 5, 5, 5, 5

C: 9, 9, 3, 3, 3, 3

D: 8, 8, 8, 2, 2, 2

Указанные варианты костей иллюстрируют важность характеристик распределения вероятностей при сравнении случайных величин, поскольку являются примерами наборов величин, которые имеют одинаковые математические ожидания, однако существенно отличаются по результатам «игры» с их использованием.

Кости с числами от 1 до 24

Набор из четырёх кубиков, на гранях которых размещены все целые числа с 1 по 24, может быть нетранзитивным. При этом в каждой паре соседних кубиков бросание одного из них дает результат, больший результата броска другого, с вероятностью близкой к 2/3.

В игре на наибольшее число при бросании костей с большей вероятностью B побеждает A, C побеждает B, D побеждает C, а A побеждает D.

A: 1, 2, 16, 17, 18, 19

B: 3, 4, 5, 20, 21, 22

C: 6, 7, 8, 9, 23, 24

D: 10, 11, 12, 13, 14, 15

Отношение к костям Ефрона Кости с числами от 1 до 24 по сути является аналогом костей Эфрона, поскольку с точки зрения относительного результата бросание пары костей на каждом из них каждое из последовательных чисел может быть заменено на наименьшее среди них. Если после такой замены числа, что остались на всех костях, проранжировать и изменить на соответствующий ранг (от 0 до 6), то получатся кости Эфрона.

• A: 1, 2, 16, 17, 18, 19 -> 1, 1, 16, 16, 16, 16 -> 0, 0, 4, 4, 4, 4

B: 3, 4, 5, 20, 21, 22 -> 3, 3, 3, 20, 20, 20 -> 1, 1, 1, 5, 5

C: 6, 7, 8, 9, 23, 24 -> 6, 6, 6, 6, 23, 23 -> 2, 2, 2, 2, 6

D: 10, 11, 12, 13, 14, 15 -> 10, 10, 10, 10, 10, 10 -> 3, 3, 3, 3, 3, 3

Кости Miwin

Кости Miwin были изобретены в 1975 году немецким физиком Михаэлем Винкельманом и получили своё название от сокращения его имени и фамилии. Суммы чисел на противоположных гранях каждой кости - 9, 10 и 11. Соответственно, общая сумма очков на каждой кости равна 30.

Первый набор костей Miwin состоит из трех костей: III, IV и V (названы по сумме двух наименьших чисел на каждом):

Кость III с числами на гранях: 1, 2, 5, 6, 7, 9

Кость IV с числами на гранях: 1, 3, 4, 5, 8, 9

Кость V с числами на гранях: 2, 3, 4, 6, 7, 8

При этом:

- вероятность, что кость III при бросании даст число, больше чем IV, составляет 17/36
- вероятность, что кость IV при бросании даст число, больше чем V, составляет 17/36
- вероятность, что кость V при бросании даст число, больше чем III, составляет 17/36

Существует ещё три набора костей Miwin с другими комбинациями чисел.

Набор с минимальными отличиями от стандартных костей

Следующий нетранзитивный набор игральных костей имеет лишь незначительные отличия от стандартных кубиков с числами от 1 до 6:

- подобно стандартным костям сумма чисел на всех гранях составляет 21
- подобно стандартным костям используются только числа от 1 до 6
- грани с одинаковыми числами на каждой из костей встречаются не чаще двух раз
- только две грани имеют числа, отличные от стандартной игральной кости:

A: 1, **1**, 3, 5, **5**, 6

B: 2, 3, **3**, 4, **4**, 5

C: 1, 2, **2**, 4, 6, **6**

Аналогично костям Miwin вероятность «выигрыша» кости A против B (или B против C, C против A) составляет 17/36. В то же время вероятность ничьей составляет 4/36, поэтому проигрыш возможен лишь в 15 случаях из 36.

Глава 2. Отношения нетранзитивности в играх и задачах

2.1. Влияние нетранзитивных костей на результат игры

Использование нетранзитивных костей влияет на результат игры со следующими правилами:

- Первый игрок выбирает игровую кость из набора.
- Второй игрок выбирает одну из костей, которые остались в наборе после выбора первого игрока.
- Оба игрока бросают свои кости; выигрывает игрок, у которого выпало большее число.

При использовании транзитивных костей преимущество в игре имеет первый игрок, который может выбрать кость, результат броска которой с вероятностью минимум 50 % будет больше результата броска любой другой кости из набора. В случае же использования набора нетранзитивных костей, приведенного ниже, преимущество получает второй игрок, который, независимо от выбора первого игрока, может выбрать из оставшихся костей такую, бросание которой с вероятностью 5/9 превысит результат первого игрока.

А: 3,3,5,5,7,7

Б: 2,2,4,4,6,6

В: 1,1,6,6,8,8

В приведенных ниже таблицах показано, что происходит с тремя возможными парами костей: (А против Б), (Б против В), (В против А).

Из первой таблицы следует, что кость А лучше, чем кость Б, поскольку она выигрывает в 20 из 36 возможных вариантов развития событий. Другими словами, кость А в среднем выигрывает в 56 процентах случаев.

Вторая таблица показывает, что кость Б лучше, так как она выигрывает в 56 процентах случаев.

В реальной жизни мы привыкли к транзитивным отношениям, которые означают, что если А лучше Б, а Б лучше В, то А *должно* быть лучше В. Тем не менее, бросив кость А против кости В, мы обнаружим, что кость В лучше, потому что она выигрывает в 56 процентах случаев, как показано в третьей таблице. Именно поэтому такие кости названы нетранзитивными: они не подчиняются обычному правилу транзитивности, так же как и ходы в КНБ. Как уже отмечалось выше, правила КНБ подчиняются нетрадиционной круговой иерархии, а не простой иерархии сверху вниз.

Кость А

Кость Б	3	3	5	5	7	7
2	А	А	А	А	А	А
2	А	А	А	А	А	А
4	Б	Б	А	А	А	А
4	Б	Б	А	А	А	А
9	Б	Б	Б	Б	Б	Б
9	Б	Б	Б	Б	Б	Б

Кость Б

Кость В	2	2	4	4	9	9
1	Б	Б	Б	Б	Б	Б
1	Б	Б	Б	Б	Б	Б
6	В	В	В	В	Б	Б
6	В	В	В	В	Б	Б
8	В	В	В	В	Б	Б
8	В	В	В	В	Б	Б

Кость В

Кость А	1	1	6	6	8	8
3	А	А	В	В	В	В
3	А	А	В	В	В	В
5	А	А	В	В	В	В
5	А	А	В	В	В	В
7	А	А	А	А	В	В
7	А	А	А	А	В	В

Каждая таблица показывает все возможные варианты развития событий, когда две игральные кости выбрасываются друг против друга.

Каждая таблица показывает все возможные варианты развития событий, когда две игральные кости выбрасываются друг против друга. В первой таблице, отображающей ситуацию «А против Б», можно увидеть, что верхний левый квадрат отмечен как А и окрашен в светло-серый цвет, поскольку кость А выигрывает, если на ней выпадает число 3, а на кости Б — число 2. В свою очередь нижний правый квадрат отмечен как Б и имеет темно-серый цвет, так как кость Б выигрывает, если на ней выпадает число 9, а на кости А — число 7. С учетом всех возможных комбинаций можно сделать вывод, что кость А выигрывает в среднем в 56 процентах случаев в игре против кости Б.

2.2. Задачи, в которыхиспользыется понятие нетранзитивности

Нетранзитивные наборы карандашей

Есть три набора из 6 карандашей. Набор А состоит из 2 карандашей длиной по 2 см, 2 карандашей длиной по 4 см, 2 карандашей длиной по 9 см. Набор Б состоит из 2 карандашей длиной по 1 см, 2 карандашей длиной по 6 см, 2 карандашей длиной по 8 см. Набор В состоит из 2 карандашей длиной по 3 см, 2 карандашей длиной по 5 см, 2 карандашей длиной по 7 см. Каждый карандаш из одного набора сравнили с каждым карандашом из других наборов. Карандаши из какого набора чаще оказываются длиннее остальных?

Правильный ответ: карандаши из одного набора чаще оказываются длиннее карандашей из второго набора, карандаши из второго набора чаще оказываются длиннее карандашей из третьего набора, а те чаще оказываются длиннее карандашей из первого набора. Возможны и другие модификации задачи, с другими наборами объектов и оцениваемыми параметрами, например, «чаще тяжелее, чем», «чаще быстрее, чем», «чаще выигрывает, чем» и т.д.

Нетранзитивные спортивные команды (автор – T.Beardon)

Есть 9 бегунов (A, B, C, D, E, F, G, H, I), которые всегда финишируют в этой последовательности. Бегуны A, F, H входят в команду X; бегуны B, D, I – в команду Y; бегуны C, E, G – в команду Z. В каждом забеге встречаются по 2 команды (в первом забеге – команды X и Y, во втором – Y и Z, в третьем – X и Z). Бегуну, пришедшему к финишу первым в забеге, дается 6 баллов, второму – 5 баллов и т.д, последнему – 1 балл. Какая из команд будет объявлена победителем по итогам всех трех забегов?

Правильный ответ: Команда X выиграла у команды Y в первом забеге, набрав 11 очков (команда Y в этом забеге набрала 10 очков). Команда Y выиграла у команды Z во втором забеге, набрав 11 очков (команда Z в этом забеге набрала 10 очков). Команда Z выиграла у команды X в третьем забеге, набрав 11 очков (команда X в этом забеге набрала 10 очков). В итоге победитель не может быть объявлен ни по общему количеству очков (у каждой команды ровно по 21 набранному очку), ни по количеству побед в забегах (у каждой команды их по одному). Заметим, что поскольку реальные бегуны не бегают с такой стабильностью (соотношение между ними может меняться в силу разных причин), то можно заменить бегунов в условиях этой задачи на заводные машинки, приписав им конкретные фиксированные скорости, на механических лягушек, прыгающих на определенную высоту, и т.д.

Нетранзитивные выборы

В городе N с населением 1000 человек выбирают мэра. Используется ранжирующая система выборов, при которой каждый избиратель ранжирует всех кандидатов по их предпочтительности. Мониторинг показал, что 395 человек предпочли кандидата А кандидату Б, а кандидата Б – кандидату В; 335 человек предпочли кандидата Б кандидату В, а кандидата В – кандидату А; 275 человек предпочли кандидата В кандидату А, а кандидата А – кандидату Б. При общем подсчете голосов оказалось, что для большинства жителей города кандидат А предпочтительнее кандидата Б, а кандидат Б предпочтительнее кандидата В. Был проведен общий подсчет голосов. Какой из кандидатов является наиболее предпочтительным для большинства жителей?

Правильный ответ: при общем подсчете голосов кандидат А является предпочтительнее кандидата Б для 67% жителей, кандидат Б является предпочтительнее кандидата В для 73% жителей, но кандидат В оказывается предпочтительнее кандидата А для 61% жителей.

Идея, лежащая в основе этой задачи, принадлежит маркизу Мари Жану Антуану де Кондорсе. Суть этой идеи, более известной как «парадокс Кондорсе», заключается в том, что транзитивные индивидуальные предпочтения могут превращаться в нетранзитивные групповые. В более общей формулировке под этим парадоксом можно понимать любую форму выборов, в результате которой образуется цикл между альтернативами ввиду того, что каждая из них превосходит другую, но уступает третьей по большинству показателей (следующая задача).

Нетранзитивные ценные бумаги

Есть три вида ценных бумаг. Ценные бумаги А имеют наиболее высокий показатель доходности, средний показатель ликвидности, низкий показатель стабильности дохода. Ценные бумаги Б имеют наиболее высокий показатель ликвидности, средний показатель стабильности дохода, низкий показатель доходности. Ценные бумаги В имеют наиболее высокий показатель стабильности дохода, средний показатель доходности, низкий показатель ликвидности. Более выгодным является тот вид ценных бумаг, который при сравнении с другими видами ценных бумаг имеет более высокие показатели по бо́льшему количеству оценочных критериев. Какой вид ценных бумаг является наиболее выгодным?

Правильный ответ: отношение «быть выгоднее, чем» в данной задаче является комплексным, в связи с чем правило транзитивности в общем случае не может быть применено. При сравнении по правилу большинства каждый из трех видов ценных бумаг превосходит другой, но уступает третьему виду по двум показателям из трех.

При обучении решению таких задач варьированию может быть подвержена не только форма, в которой они предъявляются (набор условий и требований), но и сама постановка задачи. К примеру, учащийся должен не только уметь решать задачи, поставленные учителем, но и быть в состоянии придумывать их самостоятельно. Такой дидактический метод, постановка задачи самому придумать задачу, способствует развитию мышления учащихся и стимулированию углубленного понимания ими изучаемой предметной области. Эти задания могут быть полуструктурированными (придумать задачу на заданный принцип; задачу, похожую на уже решенную, и т.д.) или структурированными (придумать задачу с теми же данными, но с другим вопросом и т.д.). Авторы предлагают энтузиастам этой темы объединиться для конструирования заданий в этой области.

Нетранзитивность в играх

Принцип нетранзитивности превосходства является стержневым для игровой деятельности и лежит в основе базовой механики целого ряда игр.

Наиболее известный пример – это игра «камень-ножницы-бумага». Циклическая структура отношений объектов этой игры послужила прототипом для разработанной в 2005 году игры Kruzno. В этой игре каждый игрок имеет три вида фигур: рыцарь, епископ и ладья (каждого по три). Ладья «бьет» епископа, епископ «бьет» рыцаря, рыцарь «бьет» ладью. Если на доске встречаются две одноименные фигуры, то они просто расходятся. Условие выигрыша – «выбить» все фигуры противника. Игра Kruzno внешне напоминает шашки или шахматы и может быть использована для развития мышления учащихся наряду с ними. О других интеллектуальных играх, построенных на принципах парадокса Кондорсе и игры «камень-ножницы-бумага», можно прочитать в работах.

Использование принципа нетранзитивности отношений превосходства при проектировании компьютерных игр заставляет пересмотреть и их возможности в обучении. Например, в компьютерных играх "Warrior Kings", "Герои меча и магии III", "The Ancient Art of War" сильные в ближнем бою, но медленные боевые единицы – юниты (пехотинцы, дендроиды) проигрывают лучникам, поскольку не успевают к ним приблизиться. Лучники проигрывают более быстрым юнитам ближнего боя (кавалерия, пегасы, варвары), которые благодаря высокой скорости перемещения могут быстро к ним приблизиться и победить в ближнем бою. Но эти же быстрые юниты проигрывают более сильным в ближнем бою, но медленным юнитам. Сценарные взаимоотношения между юнитами могут иметь и более изощренный и сложный характер. Больше того, циклические отношения превосходства в компьютерных играх могут проектироваться не только между юнитами, но и между стратегиями действий. Есть три возможных стратегии ведения боя: 1) прямая атака; 2) обход с фланга; 3) укрепиться в обороне. Если у каждого из игроков одинаковое количество юнитов, то в такой ситуации прямая атака выигрывает у флангового обхода, так как последний требует определенных перестроений, и атака приходится в незащищенную зону. По аналогичной причине обход с фланга предпочтительнее против обороняющегося противника, но оборона предпочтительнее против прямой атаки (согласно закону фон Клаузевица и математическому обобщению Ланчестера, успешность прямой атаки достигается только при перевесе сил 3 к 1). Очевидно, что для победы в заданных условиях требуется способ рассуждений, отличный от привычного со школьной скамьи «транзитивного», использование которого здесь будет приводить к гарантированным ошибкам. Чем чаще игроки в надежде выиграть будут делать ставку на один из игровых объектов, ошибочно считая его самым «сильным», тем чаще в ответ от более опытных игроков вместо желаемого подчиненного объекта будут получать доминирующий и проигрывать. Таким образом, компьютерные игры могут не только развлекать, но и развивать мышление учащихся при адекватном подборе моделей. В настоящее время информационные технологии создают принципиально новые возможности для освоения нового учебного содержания и организации учебного процесса, в том числе в области овладения транзитивностью-нетранзитивностью, что, к сожалению, недостаточно используется в обучении.

Заключение

Правило транзитивности превосходства, успешно работающее в одном пространстве ситуаций (при сравнении относительно простых, одномерных объектов), не может быть использовано в другом пространстве ситуаций: при сравнении более сложных объектов – многомерных, взаимодействующих друг с другом, обладающих вероятностными свойствами. Опора на правило транзитивности как на аксиому и использование в обучении только тех объектов и ситуаций, на которые распространяется это правило, может формировать упрощенные и ложные представления о его универсальности, ложную установку на его всеобщую применимость в любых ситуациях. Данная установка может приводить к ошибочным умозаключениям о превосходстве во множестве ситуаций сравнения объектов, объективно находящихся в нетранзитивных отношениях превосходства.

Нетранзитивные отношения абсурдны и противоречат здравому смыслу, но именно поэтому они и вызывают интерес.

Рассмотренные случаи помогают одерживать победу (либо повысить вероятность успеха) у человека, умеющего строить стратегию игры, опираясь на математический аппарат и решать «нестандартные» задачи, которые формирую критическое мышление в целом.

.

Литература и источники

1. Богданов И.И. Нетранзитивные рулетки. В кн.: Математическое просвещение. М.: МЦНМО, 2010. Сер. 3, вып. 14, с. 240–255.

2. Гарднер М. [Gardner M.] Крестики-нолики. М.: Мир, 1988.

3. Гарднер М. [Gardner M.] Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.

4. Грабовский В.И. Эволюционное возникновение стратегий поведения «камень-ножницы-бумага». http://nature.air.ru/models/rock_paper_scissors.htm#Модели

5. Пермогорский М.С. Нетранзитивность конкурентного поведения видов в биотических сообществах. Журнал общей биологии, 2014, 75(3), 226–233.

6. Поддьяков А.Н. Изменение представлений о непереходности превосходства под влиянием ознакомления с «нетранзитивными» объектами. В кн.: В.А. Барабанщиков (Ред.), Современная экспериментальная психология. М.: Институт психологии РАН, 2011. Т. 2, с. 193–205. http://publications.hse.ru/view/74121690

7. Поддьяков А.Н. Непереходность (нетранзитивность) отношений превосходства и принятие решений. Психология. Журнал Высшей школы экономики, 2006, 3(3), 88–111. http://psy-journal.hse.ru/data/2011/04/26/1210581923/88-111.pdf

8. Федоров Б.И., Зубань Е.Н., Любимов Г.П., Никитин В.Е. Элементы логической культуры. СПб.: Спец. лит., 1996.

9. Чопоров В. Прекрасная игра – нетранзитивность. http://tesera.ru/article/ingredients1

Рецензия на исследовательскую работу по теме
«Нетранзитивные кости и отношения»
учениц 8А класса МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Поздяевой Полины, Плотниковой Екатерины

Исследовательская работа посвящена проблеме овладения понятием нетранзитивные отношения.

. Цель работы четко сформулирована и обоснована. План исследования включает в себя все необходимые этапы для достижения цели.

Исследовательская работа имеет логически правильную структуру. Она состоит из введения, теоретической части, практической части, заключения, а также списка использованной при написании исследовательской работы литературы и приложений. Работа грамотно оформлена. Она содержит большое количество материала, что позволяет более наглядно раскрыть ее основные результаты.

Тема работы полностью раскрыта, Ученицы демонстрирует знания, выходящие за рамки школьной программы. В реферативной части Полина и Екатерина раскрывают теоретические основы отношений, игр. Девочки грамотно проанализировал большое количество литературы по заданной тематике.

Работа является исследовательской, поэтому способствует развитию познавательного интереса, аналитических способностей, различных способов восприятия и обработки информации.

В практической части ученицы решают задачи на транзитивность.

На протяжении всего периода работы над проектом у учениц формировались необходимые предметные знания и умения, общеучебные умения и навыки, необходимые компетентности.

Данную работу можно использовать в качестве дидактического материала для организации факультативных занятий преподавателями школы.

Таким образом, можно заключить, что поставленные цели и задачи успешно раскрыты.

Дата: 19.12.2019г. Рецензент:

Жистина Л.Ф., учитель математики

Подпись Жистиной Л.Ф. заверяю

Директор МБОУ СОШ № 18 г. Пензы А.С. Кирсанов